

## INFLUENCE DES CONDITIONS THERMIQUES DE PAROI SUR LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITE RECTANGULAIRE VERTICALE, DIFFERENTIELLEMENT CHAUFFEE

B. GILLY, P. BONTOUX et B. ROUX

Institut de Mécanique des Fluides, 1 rue Honnorat, 13003 Marseille, France

(Reçu le 26 juillet 1980)

**Résumé**—La convection naturelle dans les enceintes différentiellement chauffées est généralement étudiée dans le cas de configurations 'idéales': parois 'actives', chaude et froide, isothermes et parois terminales 'passives' parfaitement adiabatiques. Dans le cas de configurations réelles, les conditions thermiques sur les parois actives ne sont pas uniformes. Deux modèles de distribution non uniforme de température sont étudiés par une simulation numérique. Des modifications sont apportées aux lois de corrélation entre le nombre de Nusselt moyen et le nombre de Rayleigh, obtenues dans le cas idéal. L'influence de parois terminales passives de nature infiniment conductrice est également envisagée.

### NOMENCLATURE

$C$ , constante [relation (16)];  
 $C_p$ , chaleur spécifique à pression constante;  
 $g$ , accélération de la pesanteur;  
 $h$ , pas de discrétisation spatiale;  
 $H$ , distance entre parois chaude et froide (Fig. 1);  
 $k$ , conductivité thermique;  
 $l$ , facteur de forme de la cavité ( $= L/H$ );  
 $L, M$ , dimensions de la cavité (Fig. 1);  
 $n$ , normale aux frontières;  
 $Nu$ , nombre de Nusselt local ( $= q/q_{ref}$ );  
 $\bar{Nu}$ , nombre de Nusselt moyen ( $= \frac{1}{l} \int_0^l Nu \, dx$ );  
 $Pr$ , nombre de Prandtl ( $v/\chi$ );  
 $q$ , densité de flux de chaleur (convectif et conductif);  
 $q_{ref}$ , densité de flux de chaleur de référence (conductif);  
 $Ra$ , nombre de Rayleigh,  $= g\bar{\beta}(\bar{T}a - \bar{T}v)H^3/v\chi$ ;  
 $Ra_1, Ra_2$ , frontières du régime de transition (définies au paragraphe 4);  
 $\bar{t}, t$ , variable de temps, grandeurs réelle et adimensionnelle ( $= \bar{t}\chi/H^2$ );  
 $\bar{T}, T$ , température, grandeurs réelle et adimensionnelle [ $= (\bar{T} - \bar{T}o)/(\bar{T}a - \bar{T}v)$ ];  
 $\bar{u}, u$ , composante de la vitesse dans la direction  $x$ , grandeurs réelle et adimensionnelle ( $= \bar{u}H/\chi$ );  
 $\bar{v}, v$ , composante de la vitesse dans la direction  $y$ , grandeurs réelle et adimensionnelle ( $= \bar{v}H/\chi$ );  
 $\bar{x}, x$ , coordonnées d'espace, grandeurs réelle et adimensionnelle ( $= \bar{x}/H, \bar{y}/H$ ).

parois actives [relations (7) et (8)];  
 $\bar{\beta}$ , coefficient volumique d'expansion thermique;  
 $\epsilon$ , écart relatif entre nombres de Nusselt dans les cas conducteur et adiabatique [défini en (19)];  
 $\bar{\zeta}, \zeta$ , rotationnel des vitesses, grandeurs réelle et adimensionnelle ( $= \bar{\zeta}H^2/\chi$ );  
 $\nu$ , viscosité cinématique;  
 $\rho$ , masse volumique;  
 $\chi$ , diffusivité thermique ( $= k/\rho C_p$ );  
 $\bar{\psi}, \psi$ , fonction de courant, grandeurs réelle et adimensionnelle ( $= \bar{\psi}/\chi$ ).

### Indices supérieurs

$\beta$ , valeur de la variable lorsque la température de la paroi chaude est décrite par les relations (7b) ou (8b);  
 $\alpha, \beta$ , valeur de la variable lorsque les températures des deux parois actives sont décrites par les relations (7) ou (8);  
 cond, valeur de la variable lorsque les parois passives sont infiniment conductrices.

### Indices inférieurs

$a$ , valeur à la paroi chaude;  
 $m$ , valeur au centre de la cavité;  
 $0$ , valeur à température moyenne;  
 $v$ , valeur à la paroi froide;  
 $w, w + 1$ , valeurs à la paroi et au point de discrétisation voisin.

### 1. INTRODUCTION

L'ÉTUDE de la convection naturelle dans les enceintes différentiellement chauffées a de nombreuses applications pratiques: capteurs solaires, isolation thermique, croissance cristalline par transport en phase gaz-

Symboles grecs

$\alpha, \beta$ , taux de variation de température sur les

euse... Un grand nombre de travaux tant théoriques que numériques et expérimentaux ont été publiés concernant ce sujet. Une revue d'ensemble de ces études a été donnée par Catton [1]. Ces travaux ont été effectués dans le cas d'une configuration 'idéale' correspondant à une cavité parallélépipédique, dont les parois, chaude et froide, (que nous désignerons surfaces 'actives') sont supposées isothermes, et les parois latérales, (que nous désignerons surfaces 'passives') généralement adiabatiques.

Dans le cas de problèmes réels, les surfaces actives ne sont généralement pas isothermes. Pour un capteur solaire plan, par exemple, le circuit de récupération, qui est constitué d'un réseau de tubes plaqués contre l'absorbeur et parcourus par un fluide caloporteur, induit un gradient de température le long de l'absorbeur. Similairement, les expériences montrent que la température le long de la paroi froide (vitre) n'est pas uniforme: la température de la partie supérieure de la vitre peut être le double de celle de partie inférieure [2]. De plus, les parois passives ne sont jamais parfaitement isolantes mais dans un état intermédiaire entre les deux cas extrêmes de parois parfaitement isolantes et de parois infiniment conductrices. L'influence de la nature des parois passives a été étudiée précédemment dans le cas de valeurs élevées du nombre de Prandtl [3] et dans le cas de l'air pour une cavité de section carrée [4].

L'objet de la présente étude est de chercher quelles sont les modifications apportées aux corrélations caractérisant les différents paramètres de l'écoulement, lorsque les hypothèses des conditions idéales (parois actives isothermes et parois passives parfaitement adiabatiques) ne sont plus vérifiées.

Le modèle physique étudié est donné sur la Fig. 1. La cavité parallélépipédique est verticale; les deux surfaces actives, séparées par une distance  $H$ , sont maintenues à des températures différentes  $T_a$  et  $T_v$  avec  $T_a > T_v$ . Cette différence de température crée un mouvement convectif qui sera supposé laminaire, stationnaire et bidimensionnel. Les paramètres caractéristiques du problème sont le facteur de forme  $l = L/H$ , le nombre de Rayleigh,  $Ra$ , basé sur la différence de température entre les parois actives chaude et froide, et le nombre de Prandtl,  $Pr$ , caractérisant le fluide à l'intérieur de l'enceinte ( $Pr = 0,713$ ).

2. MODELE MATHEMATIQUE

Le mouvement de convection naturelle est décrit par

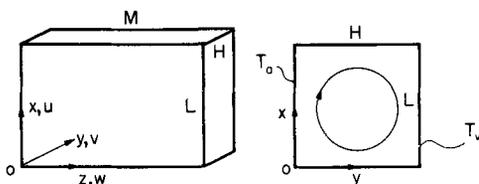


FIG. 1. Géométrie de la cavité.

les équations de Navier-Stokes couplées à l'équation de l'énergie. Dans le cas où les variations de densité dues aux écarts de température restent modérées ( $\Delta\rho/\rho < 10\%$ ), l'approximation de Boussinesq simplifiée [5] est justifiée (densité constante sauf dans le terme de poussée d'Archimede, dissipation visqueuse négligeable, propriétés physiques du fluide constantes). Lorsque l'on considère, comme variables dépendantes, la fonction de courant  $\psi$ , le rotationnel des vitesses  $\zeta$  et la température  $T$ , les équations du mouvement adimensionnalisées s'écrivent sous leur forme instationnaire

$$\frac{D\zeta}{Dt} = Pr\nabla^2\zeta - RaPr \frac{\partial T}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \nabla^2 T \tag{2}$$

$$\nabla^2\psi = -\zeta \tag{3}$$

où

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

avec

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Les conditions aux limites dynamiques sont fournies par les conditions d'adhérence et de non perméabilité sur les parois

$$\psi(0, y) = \psi(l, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, 1) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(l, y) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 1) = 0. \tag{5}$$

Dans le cas idéal, les conditions aux limites thermiques sur les parois actives sont simplement

$$T(x, 0) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad T(x, 1) = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Pour simuler des distributions non uniformes de température, des modèles de type linéaire et sinusoïdal ont été considérés

$$T(x, 0) = -\frac{1}{2} + \alpha \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \tag{7a}$$

et

$$T(x, 1) = \frac{1}{2} + \beta \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \tag{7b}$$

$$T(x, 0) = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \sin \left[ \pi \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] \tag{8a}$$

et

$$T(x, 1) = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} \sin \left[ \pi \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right]. \tag{8b}$$

Les conditions aux limites thermiques pour les parois passives, s'écrivent dans le cas de parois

isolantes

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial T}{\partial x}(l, y) = 0 \quad (9)$$

et dans le cas de parois infiniment conductrices

$$\frac{\partial T}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial T}{\partial y}(l, y) = 1. \quad (10)$$

### 3. METHODES NUMERIQUES

Bien qu'on ne s'intéresse qu'à la solution stationnaire, les équations du mouvement (1), (2) et (3) sont intégrées sous la forme pseudo-instationnaire obtenue en ajoutant le terme  $\partial\psi/\partial t$  dans le membre de droite de l'équation (3). Chacune de ces équations est alors une équation aux dérivées partielles parabolique dans la direction temporelle et elliptique dans les deux directions d'espace. Les équations aux dérivées partielles de ce type ont été résolues en utilisant un schéma implicite aux directions alternées (ADI) [6, 7] qui permet, à chaque étape, de se ramener à une équation différentielle ordinaire du second ordre. Cette équation différentielle peut être traitée sous forme conservative ou non conservative. Elle pourra être résolue avec une précision d'ordre 1 en utilisant un schéma décentré, avec une précision d'ordre 2 en utilisant un schéma centré et avec une précision d'ordre 4 en utilisant la méthode compacte hermitienne. Pour les méthodes hermitiennes qui n'utilisent aussi que trois points de discrétisation, les dérivées premières et secondes sont considérées comme des inconnues du problème [8]. Nous avons en fait utilisé une méthode hermitienne mixte basée sur l'approximation  $O(h^4)$  de l'équation (3) et sur l'approximation classique,  $O(h^2)$  ou  $O(h)$ , de l'équation de transport du rotationnel (1) [4, 9, 10]. Dans le cas où l'on dispose de conditions de type Dirichlet sur la température (parois passives infiniment conductrices), une approximation hermitienne  $O(h^4)$  pour l'équation de l'énergie a été également considérée. Le traitement des équations sous la forme conservative améliore la convergence de l'algorithme et la précision de la solution. Dans le cas des configurations sévères d'écoulement ( $Ra > 100\,000$ ,  $l \geq 10$ ), il est intéressant d'utiliser un processus de décentrement directionnel qui introduit une 'fausse diffusion' numérique, mais permet d'obtenir des solutions approchées avec un nombre limité de points de discrétisation (inférieur à 2400); la précision de la solution peut être alors éventuellement améliorée en poursuivant la convergence avec une méthode mixte centrée.

Les conditions aux limites sur le rotationnel sont fournies par la discrétisation de l'équation (3). La relation utilisée est la relation de Hirsh [8] qui dans le cas des méthodes mixtes améliore la précision de l'approximation [9]

$$\zeta_w = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right)_{w+1} + \frac{6}{h} \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{w+1} + \frac{12}{h^2} (\psi_w - \psi_{w+1}). \quad (11)$$

### 4. CONFIGURATION IDEALE—RAPPEL DES RESULTATS ANTERIEURS

Nous allons, d'abord, rappeler certains résultats obtenus dans le cas idéal où l'on suppose que la température de chacune des parois actives est maintenue constante et que les parois passives sont parfaitement adiabatiques [4, 11].

Ces études ont montré que la construction de corrélations significatives entre les pertes de chaleur et les paramètres caractéristiques de l'enceinte et du fluide, était très sensiblement dépendante des régimes d'écoulement à l'intérieur de la cavité. Il est par suite nécessaire de connaître les frontières entre les différents régimes. Dans le cas d'écoulement bidimensionnel laminaire, différents régimes ont été mis en évidence par Eckert et Carlson [12]: régimes de conduction, de transition et de couche limite. Nous avons utilisé pour la limite supérieure du régime de conduction,  $Ra_1$ , et la limite inférieure du régime de couche limite,  $Ra_2$ , les définitions données par Thomas et De Vahl Davis [13]:  $Ra_1$  est la valeur du nombre de Rayleigh pour laquelle le gradient horizontal de température au centre de la cavité  $(\partial T/\partial y)_m$  est égal à 0,9 et  $Ra_2$  est la valeur du nombre de Rayleigh pour laquelle  $(\partial T/\partial y)_m$  est égal à 0. Pour l'air et dans le cas d'une cavité verticale, des valeurs de ces frontières ont été proposées [4, 11]

$$Ra_1 = 750 \text{ et } Ra_2 = 7\,500 \text{ pour } l = 1 \quad (12)$$

$$Ra_1 = 250l \text{ et } Ra_2 = 2\,500l \text{ pour } l \geq 4. \quad (13)$$

Les pertes convectives, pour le régime de couche limite, peuvent être évaluées [4, 11] par des corrélations entre le nombre de Nusselt moyen,  $\bar{Nu}$ , calculé sur le plan médian, et les puissances des deux paramètres que sont le nombre de Rayleigh,  $Ra$ , et le facteur de forme,  $l$ , suivant les relations:

$$\bar{Nu} = 0,138Ra^{0,30} \text{ pour } l = 1 \quad (14)$$

$$\bar{Nu} = 0,29Ra^{0,25}l^{-0,25} \text{ pour } l \geq 4. \quad (15)$$

Le débit à l'intérieur de la cavité est caractérisé par la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité  $\psi_m$ . Une valeur approchée de celle-ci, déduite de la théorie de Gill [14], a été proposée [4]

$$\psi_m \simeq C^3 l (Ra l^{-1})^{0,25} \quad (16)$$

où  $C$  est une constante qui s'exprime de façon analytique

$$C = [4l(\partial T/\partial x)_m]^{-1/4}.$$

$(\partial T/\partial x)_m$  est le gradient vertical de température au centre de la cavité, qui est un paramètre caractéristique représentant l'état de stratification thermique [15]. De plus, si on choisit les valeurs  $C = 0,80$  pour  $l = 1$  et  $C$

= 0,85 pour  $l \geq 4$ , la formule (16) donne une bonne approximation de  $\psi_m$  [16].

5. INFLUENCE DE LA NATURE DES PAROIS PASSIVES

Dans le cas d'une cavité carrée où les parois passives sont parfaitement conductrices, les valeurs frontières du régime de transition  $Ra_1^{cond}$  et  $Ra_2^{cond}$  sont augmentées de 33 et 13% par rapport aux valeurs données dans le cas idéal par Roux *et al.* [4]

$$Ra_1^{cond} = 1000 \text{ et } Ra_2^{cond} = 8500 \text{ pour } l = 1. \quad (17)$$

La corrélation entre le nombre de Nusselt moyen, calculé sur la paroi froide, et le nombre de Rayleigh s'écrit alors, pour le régime de couche limite [4]

$$\bar{Nu}^{cond} = 0,130Ra^{0,28}. \quad (18)$$

Ce résultat fait apparaître une diminution du nombre de Nusselt par rapport au cas idéal pour une valeur fixée du nombre de Rayleigh (pour  $Ra = 100\,000$  on note une diminution de 21% environ). Ce résultat semble paradoxal, en fait le nombre de Nusselt considéré représente uniquement l'énergie perdue à travers la paroi froide de la cavité et ne tient pas compte des pertes à travers les parois passives qui sont nulles dans le cas idéal.

Nous avons étudié l'influence de la nature des surfaces passives dans le cas de cavités rectangulaires. L'écart sur le nombre de Nusselt par rapport au cas idéal, caractérisé par la quantité

$$\varepsilon = 2 \left| \frac{\bar{Nu} - \bar{Nu}^{cond}}{\bar{Nu} + \bar{Nu}^{cond}} \right| \quad (19)$$

a été représenté sur la Fig. 2 en fonction du nombre de Rayleigh,  $Ra$ , pour différentes valeurs de l'allongement  $l$ . L'analyse de la figure met en évidence les comportements suivants :

L'écart  $\varepsilon$  est, évidemment, voisin de zéro dans le régime de conduction ( $Ra < Ra_1^{cond}$ ), il est sensiblement constant dans le régime de couche limite, il varie de façon importante avec  $Ra$ , lorsque  $l \leq 1$ , dans le régime de transition.

A l'intérieur du régime de couche limite, l'écart  $\varepsilon$  décroît avec  $l$ . Ce comportement est confirmé sur la Fig. 3, où est représenté l'évolution de  $\varepsilon$  en fonction de  $l$  pour  $Ra/l = 10\,000$ , qui montre une décroissance très importante de  $\varepsilon$  pour  $1 \leq l \leq 5$ , puis une décroissance modérée pour  $l \geq 5$  ce qui traduit la diminution progressive de l'influence des parois terminales lorsque  $l$  augmente. De plus, l'écart  $\varepsilon$  reste inférieur à 10% pour  $l > 5$ .

Les résultats obtenus par Wilkes et Churchill [17], Koutsoheras [18] et Catton *et al.* [3] ont été représentés sur la Fig. 2. Nos résultats montrent un très bon accord avec ceux de Koutsoheras pour  $l = 1$  et dans le cas de l'air. Ils sont très voisins de ceux de Catton, obtenus pour  $Pr = \infty$ , jusqu'à  $Ra = 10\,000$ . Pour  $Ra \geq 10\,000$ , on observe certaines différences qui devraient être dues à l'effet du nombre de Prandtl.

6. INFLUENCE DE PAROIS ACTIVES NON ISOTHERMES

L'influence de parois actives non isothermes a été

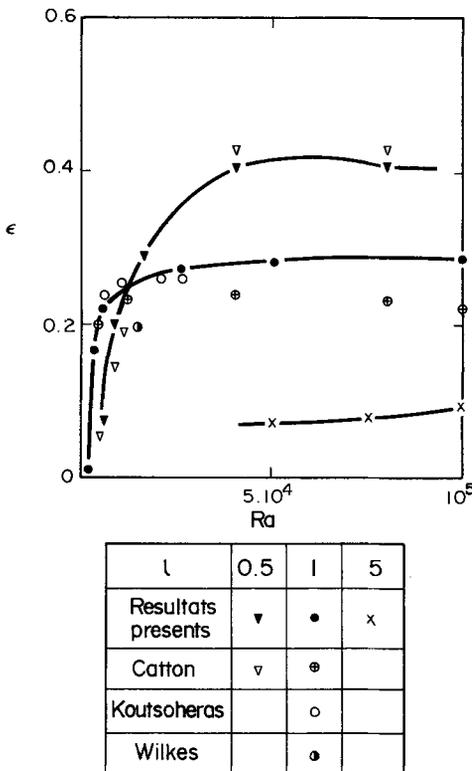


FIG. 2. Evolution de  $\varepsilon$  en fonction de  $Ra$ .

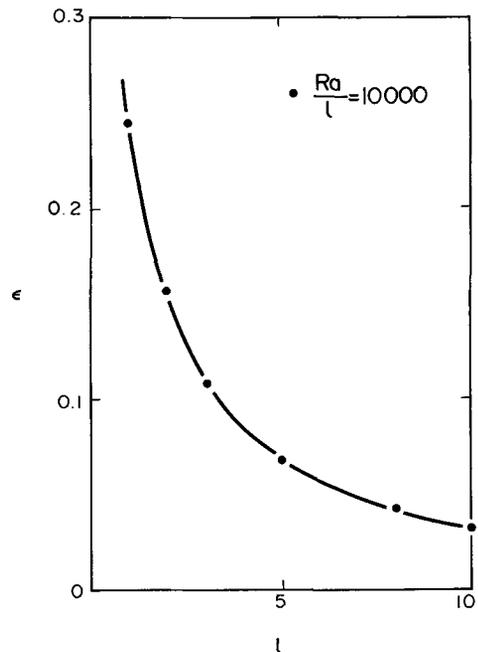


FIG. 3. Evolution de  $\varepsilon$  en fonction de  $l$ .

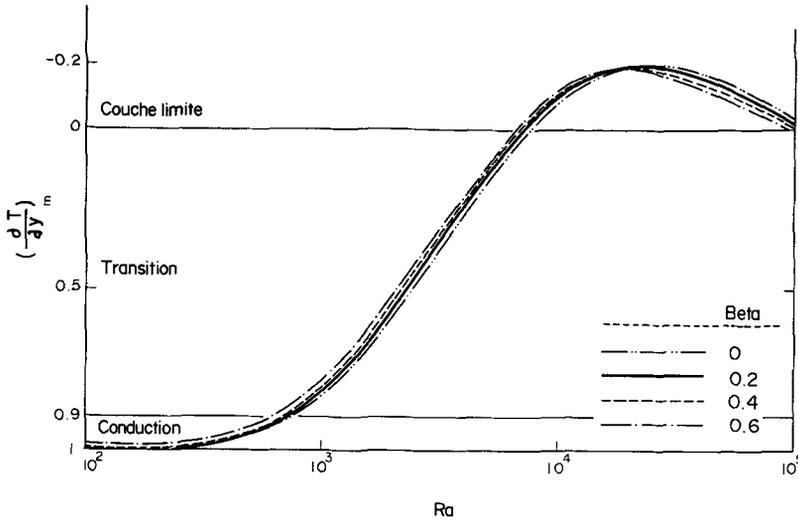


FIG. 4. Variation du gradient horizontal de température au centre de la cavité (cas adiabatique).

étudiée dans le cas de parois passives parfaitement adiabatiques. La variation de température sur une paroi active a été modélisée par une loi linéaire ou sinusoïdale [relations (7) et (8)], en faisant varier les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  entre 0 et 0.6.

On a pu montrer [16] que, pour des raisons de symétrie, la densité de flux de chaleur de référence intervenant dans la définition du nombre de Nusselt est la même,  $q_{ref} = k(\bar{T}a - \bar{T}v)/H$ , dans le cas des conditions (7) et (8) que dans le cas idéal [conditions (6)]. Par suite, on peut conserver la définition habituelle du nombre de Nusselt.

De plus, lorsqu'on limite la variation à une seule des parois actives, on a pu mettre en évidence une correspondance entre les solutions obtenues dans le cas d'une variation linéaire ou sinusoïdale de température sur l'une ou l'autre des deux parois actives respectivement :

les inconnues du problème, en deux points symétriques par rapport au centre de la cavité, sont égales ( $\psi$ ,  $\zeta$ ,  $\partial T/\partial x$ ,  $\partial T/\partial y$ ,  $Nu$ ) ou opposées ( $T$ ,  $u$ ,  $v$ );

les lignes de courant et les lignes isothermes se déduisent donc les unes des autres par une symétrie par rapport au centre de la cavité.

Il est donc équivalent de considérer la variation de température sur la surface froide ou sur la surface chaude.

### 6.1. Influence de l'une des parois actives non isotherme

Dans ce paragraphe, nous nous sommes placés dans le cas d'une cavité carrée; la température de l'une des parois actives (ici la paroi chaude) a une variation de température de type linéaire (relation (7b)) ou sinusoïdale (relation (8b)).

#### 6.1.1. Régimes d'écoulement. L'évolution du gradient horizontal de température au centre de la cavité,

$(\partial T/\partial y)_m$ , en fonction de  $Ra$  (Fig. 4) montre que lorsque  $\beta$  varie de 0 à 0.6, les courbes sont translatées par rapport à  $\beta = 0$ , vers les ordonnées négatives pour  $Ra \leq 25\,000$ ; au-delà de cette limite les courbes sont décalées vers les ordonnées positives. Lorsque l'on utilise les critères de Thomas et De Vahl Davis [13], les valeurs frontières,  $Ra_1^\beta$  et  $Ra_2^\beta$ , du régime de transition sont donc diminuées par rapport aux valeurs,  $Ra_1$  et  $Ra_2$ , obtenues dans le cas idéal [relations (12)], suivant les formules

Cas linéaire [relation (7b)],

$$Ra_1^\beta = (1 - 0.25\beta)Ra_1 \tag{20}$$

$$Ra_2^\beta = (1 - 0.17\beta)Ra_2$$

Cas sinusoïdal [relation (8b)],

$$Ra_1^\beta = (1 - 0.25\beta)Ra_1 \tag{21}$$

$$Ra_2^\beta = (1 - 0.25\beta)Ra_2.$$

Les lignes isothermes (Fig. 5) montrent, pour les trois régimes d'écoulement, une distorsion de plus en plus accentuée, lorsque  $\beta$  augmente, au voisinage de la paroi non isotherme, ce qui résulte de la variation linéaire de température imposée sur cette paroi. On peut noter la présence de lignes isothermes supplémentaires (pour  $\beta = 0.2$ ,  $T = 0.5$ , pour  $\beta = 0.4$ ,  $T = 0.6$ , pour  $\beta = 0.6$ ,  $T = 0.7$ ). Par contre la région voisine de la paroi isotherme n'est pratiquement pas perturbée; ce qui montre une certaine indépendance, par rapport à  $\beta$ , entre l'écoulement montant le long de la paroi chaude et celui qui descend le long de la paroi froide. La Fig. 5 montre également que le gradient pariétal de température affecte de façon très sensible le coeur de la cavité dans le régime de conduction (Fig. 5(a)). Dans le cas du régime de couche limite [Fig. 5(c)], la région affectée apparaît beaucoup plus restreinte et limitée

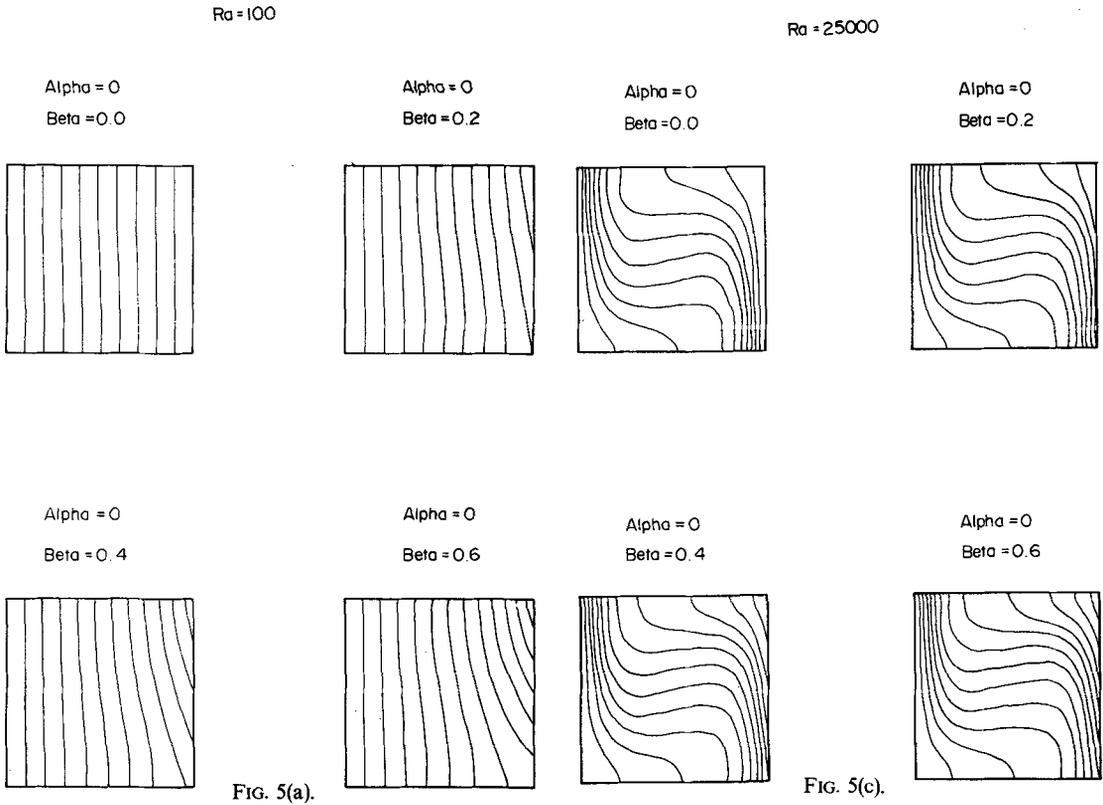


FIG. 5(a).

FIG. 5(c).

FIG. 5. Influence d'une variation de température de la paroi chaude sur les isothermes: (a)  $Ra = 100$ ; (b)  $Ra = 2500$ ; (c)  $Ra = 25000$ .

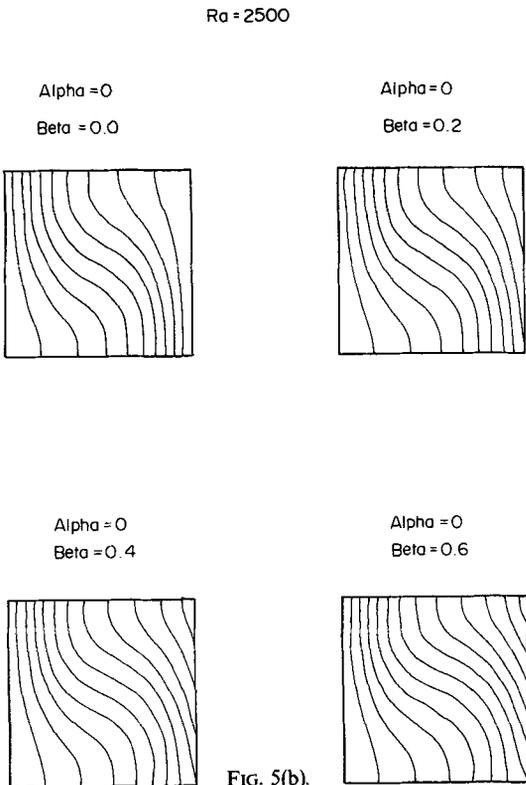


FIG. 5(b).

essentiellement à la couche limite adjacente à la paroi non isotherme.

Sur la Fig. 6, où l'on a représenté les lignes de courant obtenues dans le cas idéal et pour une variation linéaire de température, on voit que le comportement est assez différent: les perturbations dues au gradient de température pariétal apparaissent minimales dans le cas des régimes de conduction et de transition [Fig. 6(a), 6(b)]. Par contre, elles deviennent très importantes dans le cas du régime de couche limite [Fig. 6(c)] où elles affectent directement le coeur de la cavité en mettant en évidence une dissymétrie des lignes de courant. Ces perturbations se traduisent par une diminution du débit lorsque  $\beta$  augmente. Le ralentissement global du fluide est mis en évidence, sur la Fig. 7, par les profils de vitesse lorsque  $\beta$  varie de 0 à 0.6. Le débit global, caractérisé par la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité,  $\psi_m^\beta$  peut être relié à la valeur approchée  $\psi_m$  obtenue dans le cas idéal [relation (16)]

$$\psi_m^\beta \cong (1 - 0.14\beta)\psi_m \quad (22)$$

où  $\psi_m$  est inversement proportionnel au gradient vertical de température au centre de la cavité  $(\partial T/\partial x)_m^{3/4}$ . On a comparé, sur la Fig. 8, les modifications de  $(\partial T/\partial x)_m$  par rapport au cas idéal, lorsque  $\beta$

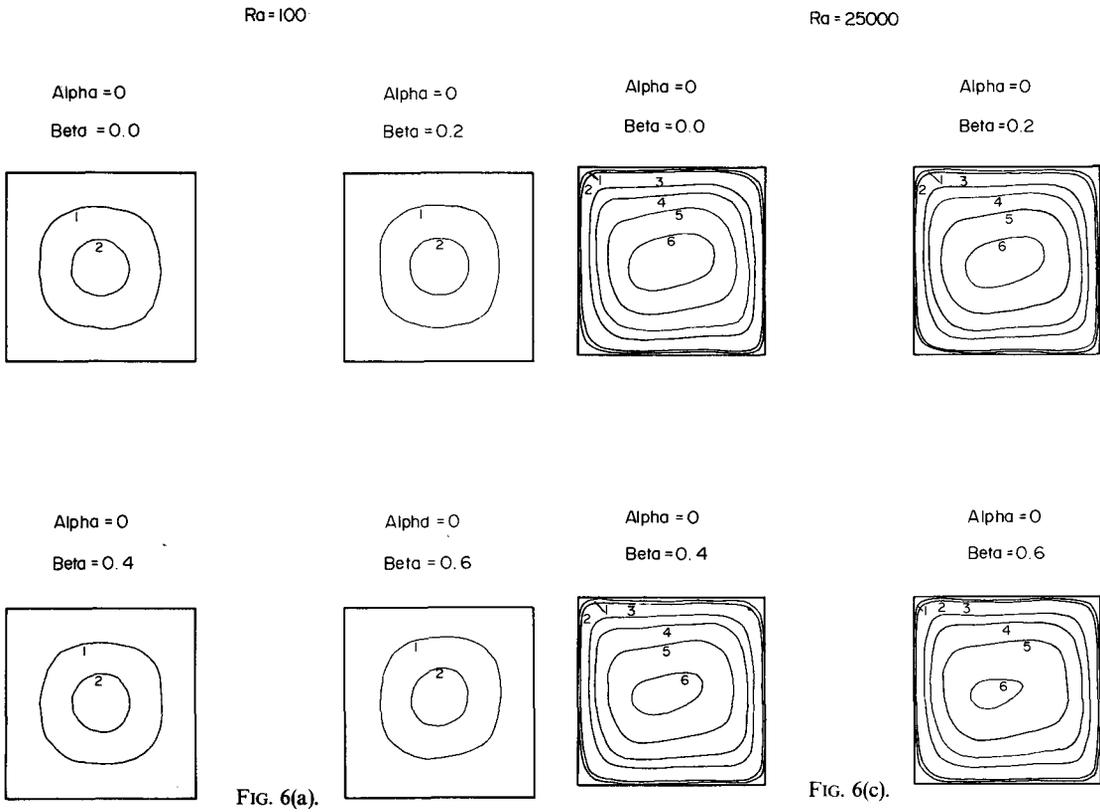


FIG. 6(a).

FIG. 6(c).

FIG. 6. Influence d'une variation de température de la paroi chaude sur les lignes de courant: (a)  $Ra = 100$ ; (b)  $Ra = 2500$ ; (c)  $Ra = 25000$ .

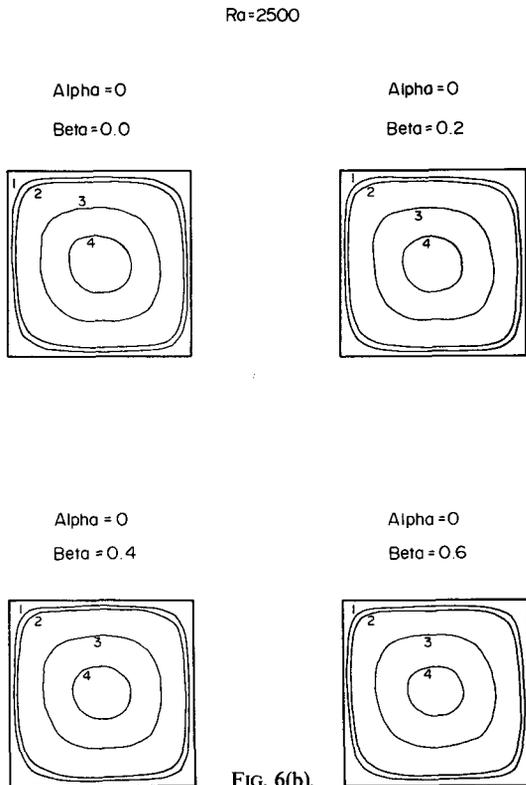


FIG. 6(b).

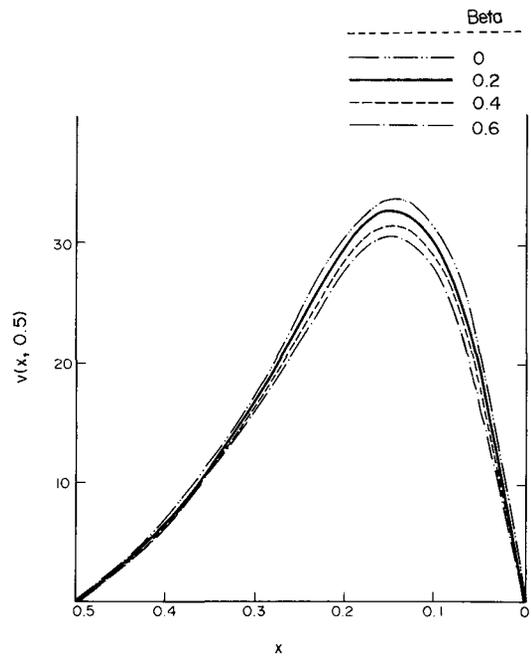


FIG. 7. Profils de la composante horizontale de la vitesse,  $v$ , le long d'un axe médian vertical ( $Ra = 1000000$ ,  $\alpha = 0$ ).

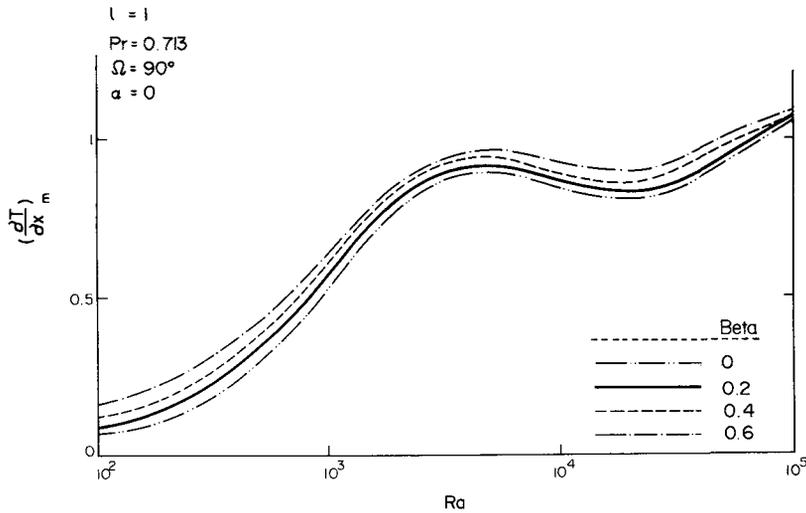


FIG. 8. Variation du gradient vertical de température au centre de la cavité.

varie. Les résultats montrent que  $(\partial T/\partial x)_m$  croît avec  $\beta$ . L'extension au cas de parois non isothermes de la relation (16) donnerait des valeurs approchées de  $\psi_m^\beta$  qui seraient tout à fait voisines de celles fournies par la relation (22)

$$\psi_m^\beta \approx \psi_m \left[ \frac{(\partial T/\partial x)_m}{(\partial T/\partial x)_m^\beta} \right]^{3/4} \quad (23)$$

6.1.2. *Evaluation des pertes convectives.* Dans le cas d'une variation linéaire de température [relation (7b)], l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh est représenté sur la Fig. 9 pour différentes valeurs de  $\beta$ . Lorsque  $\beta$  varie de 0 à 0.6, le nombre de Nusselt augmente légèrement, pour une valeur fixée de  $Ra$ , ce qui traduit une augmentation des pertes convectives. Dans le régime de couche limite, on peut proposer pour relier le nombre de Nusselt à sa valeur dans le cas idéal,  $\bar{Nu}$ , [relation (14)], la corrélation approchée suivante

$$\bar{Nu}^\beta = (1 + 0.08\beta)\bar{Nu} \quad (24)$$

Si nous choisissons la modélisation sinusoïdale [relation (8b)], la corrélation est très légèrement différente

$$\bar{Nu}^\beta = (1 + 0.06\beta)\bar{Nu} \quad (25)$$

On a représenté sur la Fig. 10, les pertes de chaleur locales, caractérisées par le nombre de Nusselt,  $Nu(x, 1)$ , le long de la paroi non isotherme. L'analyse de cette figure met en évidence les points suivants:

La variation du nombre de Nusselt local dans le cas idéal est similaire à celle obtenue par Catton *et al.* [3], en particulier la courbe a une pente nulle au voisinage des parois terminales; toutefois la Fig. 10 met en évidence la présence d'un faible extremum relatif de  $Nu$ , au voisinage de la paroi adiabatique  $x = 0$ , qui n'est pas observé par Catton. Cette différence doit provenir du fait que les résultats de Catton ont été obtenus pour

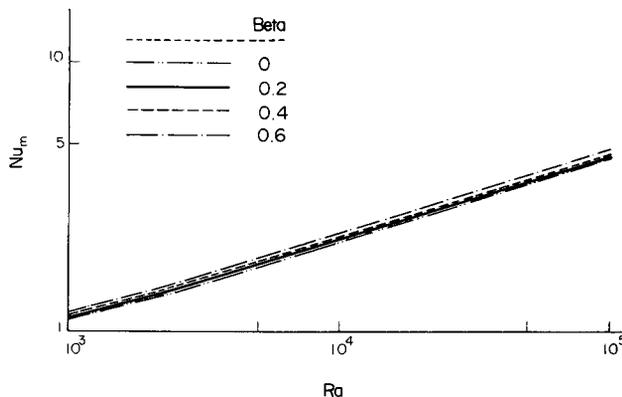


FIG. 9. Variation du nombre de Nusselt moyen,  $\bar{Nu}_m$ , en fonction du nombre de Rayleigh ( $\alpha = 0$ ).

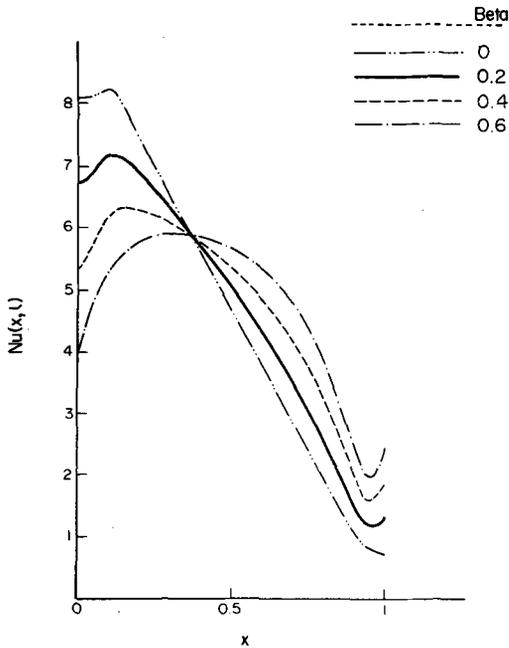


FIG. 10. Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude ( $Ra = 100\,000$ ,  $\alpha = 0$ ).

$Ra = 300\,000$  et  $Pr = \infty$ .

La présence d'un gradient de température [relation (7b)] correspond à une diminution sensible des pertes locales dans le tiers inférieur de la cavité ; en particulier, lorsque  $\beta$  augmente, le maximum se déplace dans le sens des  $x$  croissants.

Dans les deux tiers supérieurs de la cavité, les pertes augmentent lorsque  $\beta$  augmente, elles font apparaître un minimum relatif au voisinage immédiat de la paroi adiabatique supérieure.

6.2. Influence des deux parois actives non isothermes

Nous avons également étudié, dans le cas de cavités carrée ( $l = 1$ ) ou allongée ( $l = 4, 6$  et  $10$ ), l'influence d'une variation linéaire de température sur les deux parois actives simultanément [relation (7) avec  $\alpha$  et  $\beta$  compris entre 0 et 0.6]. Nous avons supposé, dans un premier temps, que les deux pentes  $\alpha$  et  $\beta$  de ces deux variations sont égales. On a montré [16] que ce type de conditions aux limites rétablissait les symétries qui existent dans le cas idéal.

Nous allons voir, dans ce paragraphe, que les modifications apportées aux résultats obtenus dans le cas idéal, sont similaires lorsqu'on considère l'une seulement ou les deux parois actives non isothermes ; toutefois les effets relatifs à chacune des parois s'additionnent.

6.2.1. Régimes d'écoulement. L'évolution (Fig. 11) de  $(\partial T / \partial y)_m$  en fonction de  $Ra$ , pour différentes valeurs des pentes  $\alpha = \beta$  ( $l = 1$ ), est semblable à celle observée sur la Fig. 4. Les valeurs du nombre de Rayleigh pour les frontières entre régimes de conduction, de transition et de couche limite s'expriment de la façon suivante, par rapport au cas idéal

$$Ra_1^{\alpha, \beta} = [1 - 0.25(\alpha + \beta)] Ra_1 \quad (26a)$$

$$Ra_2^{\alpha, \beta} = [1 - 0.17(\alpha + \beta)] Ra_2. \quad (26b)$$

On a pu vérifier que, dans le cas  $l \geq 4$ , la relation (26b) était encore valable.

On retrouve sur les tracés des lignes isothermes et des lignes de courant, obtenues pour les trois régimes d'écoulement, les mêmes types de phénomènes observés dans le cas d'une seule paroi active non isotherme (Section 6.1.1.) mais avec, en plus, les propriétés de symétrie. En particulier, le débit diminue, dans le régime de couche limite, suivant la relation

$$\psi_m^{\alpha, \beta} \cong [1 - 0.14(\alpha + \beta)] \psi_m, \quad \text{pour } l = 1 \quad (27a)$$

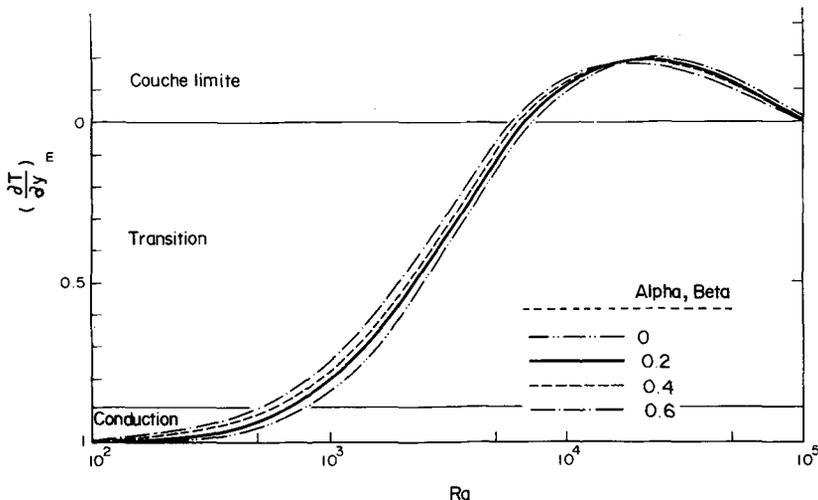


FIG. 11. Variation du gradient horizontal de température au centre de la cavité, en fonction du nombre de Rayleigh.

Ra = 200 000

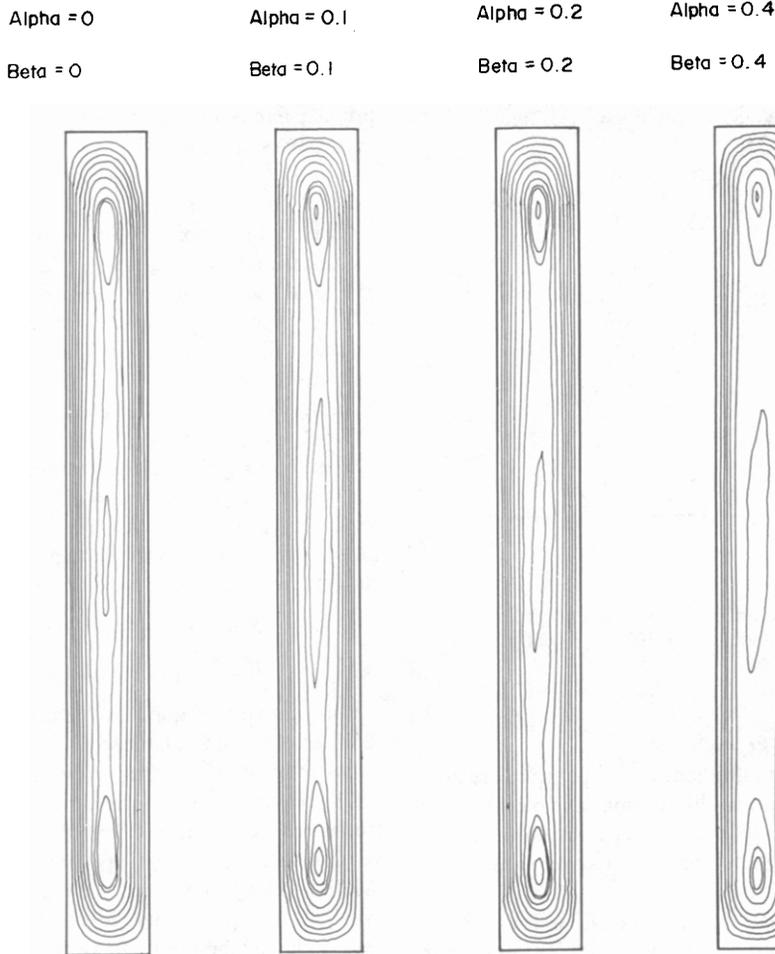


FIG. 12. Influence d'une variation de température sur les deux parois actives: lignes de courant ( $l = 10$ ).

$$\psi_m^{\alpha,\beta} \cong [1 - 0.25(\alpha + \beta)]\psi_m \quad \text{pour } l \geq 4. \quad (27b)$$

On remarque que l'effet seul du paramètre de stratification  $(\partial T/\partial x)_m$  au centre de la cavité, peut, comme précédemment (Section 6. 1.1.), rendre compte de la variation de débit, conformément à la relation (23).

Dans le cas de cavité allongée, on note de plus que lorsque des instabilités transverses existent dans le cas idéal, elles sont conservées lorsque les gradients de température  $\alpha$  et  $\beta$  augmentent (Fig. 12); toutefois, ces rouleaux observés correspondent à des valeurs décroissantes de  $\psi_m$ , comme cela est décrit dans la relation (27b). En ce qui concerne les configurations d'isothermes (Fig. 13) des différences sont surtout sensibles aux extrémités de la cavité; de plus les gradients locaux de température,  $(\partial T/\partial x)_m$ , augmentent très sensiblement.

6.2.2. *Evaluation des pertes convectives.* La représentation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh pour  $l = 1$  et  $0 < \alpha = \beta < 0.6$  (Fig. 14), nous montre que les effets respectifs de chacune des parois s'ajoutent. On a cherché à construire, pour le régime de couche limite ( $Ra > 7500$ ), une corrélation approchée sous la forme d'une loi linéaire de  $(\alpha + \beta)$

$$\bar{Nu}^{\alpha,\beta} = [1 + 0.08(\alpha + \beta)]\bar{Nu} \quad \text{pour } l = 1 \quad (28a)$$

De même, pour  $Ra/l \geq 10000$  on a

$$\bar{Nu}^{\alpha,\beta} = [1 + 0.07(\alpha + \beta)]\bar{Nu} \quad \text{pour } l \geq 4. \quad (28b)$$

On a représenté sur la Fig. 15 la variation du Nusselt local  $Nu(x, 1)$  sur la paroi chaude pour  $l = 10$ ,  $Ra = 30000$  et  $Ra = 100000$ . Dans le cas idéal ( $\alpha = \beta = 0$ ), les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux expérimentaux de Dulnev, Zarichnyak et Sharkov

$Ra = 200\ 000$

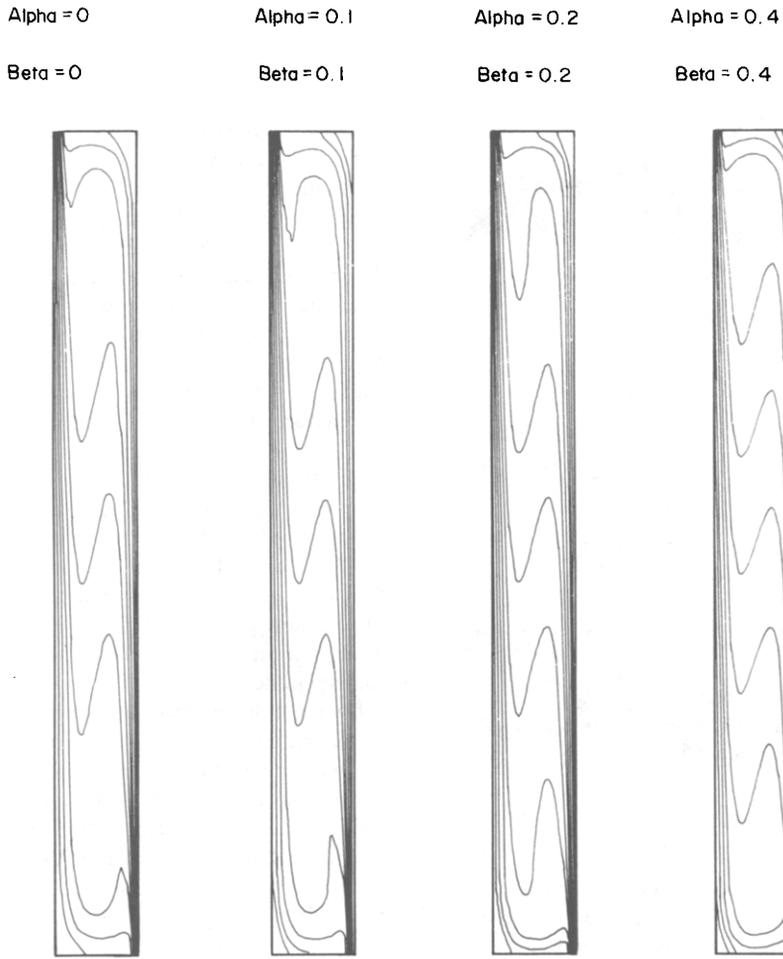


FIG. 13. Influence d'une variation de température sur les deux parois actives: isothermes ( $l = 10$ ).

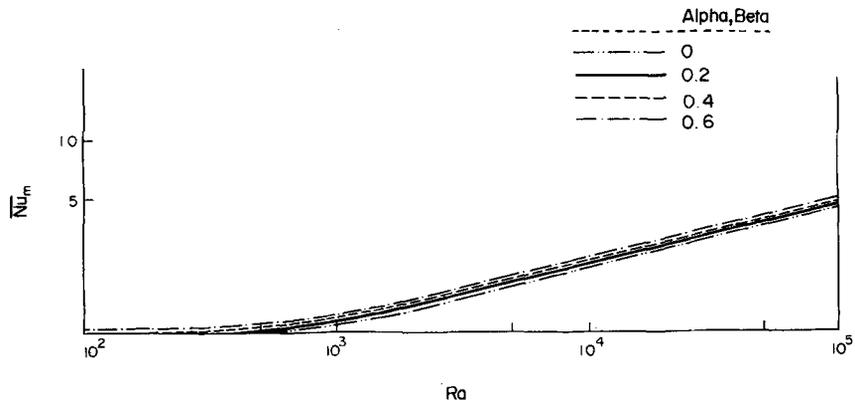


FIG. 14. Variation du nombre de Nusselt moyen,  $\bar{Nu}_m$ , en fonction du nombre de Rayleigh.

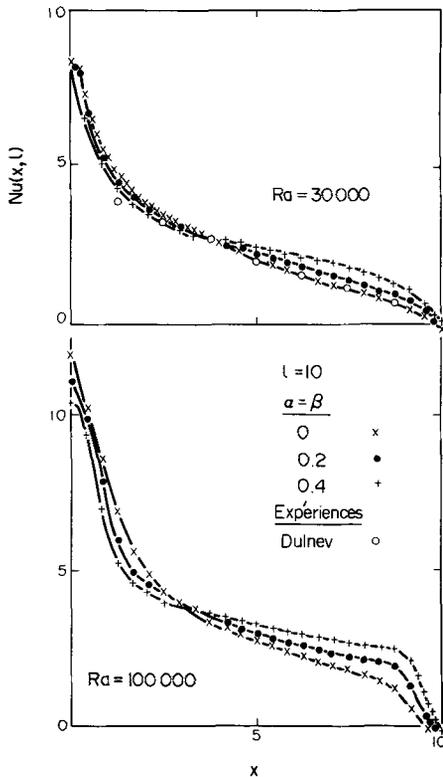


FIG. 15. Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude.

(Fig. 6 de [19]) pour  $Ra \cong 30\,000$ , en particulier dans la zone supérieure ( $x \geq 2.5$ ). Le comportement de  $Nu(x, 1)$  correspond également à celui observé par Catton, Ayyaswamy and Clever (Fig. 5 de [3]) pour  $l = 5$  et  $Ra = 300\,000$ , notamment au voisinage des parois adiabatiques où les tangentes à la courbe sont horizontales (ce qui se justifie théoriquement puisque  $\partial^2 T / \partial x \partial y = 0$  pour  $x = 0$  et  $x = l$ ). Des différences sensibles sont, cependant, observées par rapport aux résultats de Newell et Schmidt (Fig. 6 de [20]) qui mettent en évidence un maximum relatif au voisinage de la paroi adiabatique  $x = 0$ ; ces différences doivent probablement être attribuées aux erreurs de troncature de l'approximation numérique de Newell et Schmidt [20] qui utilisent un maillage ( $25 \times 13$ ) avec un pas variable au voisinage des parois, alors que les résultats présentés ont été obtenus avec un maillage régulier de ( $120 \times 20$ ). Lorsque l'on considère des parois actives non isothermes, la Fig. 15 montre une diminution de l'influence de la variation de température pariétale par rapport à celle observée sur la Fig. 10 dans le cas  $l = 1$ .

### 7. CONCLUSION

Les principales études consacrées au phénomène de la convection naturelle dans les enceintes différentiellement chauffées avaient été limitées au cas de parois actives isothermes et de parois terminales adiabati-

ques. La contribution principale de ce travail a été d'étudier les modifications apportées aux régimes de convection, par la présence de parois actives non isothermes dans le cas de cavités verticales. Des modèles de variation de température de type linéaire et sinusoïdalx ont été considérés. De nouvelles corrélations tenant compte des variations de température pariétales, ont été proposées pour définir les limites des régimes d'écoulement et les pertes thermiques par convection.

Du point de vue dynamique, la prise en compte de parois actives non isothermes se traduit par une diminution du débit et des vitesses d'écoulement. Dans le cas des cavités carrées, les configurations d'écoulement sont principalement modifiées dans le cas du régime de couche limite. Dans le cas des cavités allongées, pour lesquelles on observe des instabilités transverses (instabilités de coin), en présence de parois isothermes, ces instabilités sont conservées lorsqu'on introduit un gradient de température pariétal. Les frontières des régimes d'écoulement sont atteintes pour des valeurs du nombre de Rayleigh plus petites que dans le cas idéal. Pour un gradient pariétal de  $\alpha = \beta = 0.5$ , les valeurs du nombre de Rayleigh critique sont diminuées de 25 et 17%, respectivement pour la fin du régime de conduction et le début du régime de couche limite.

Du point de vue de l'état thermique de la cavité, les pertes par convection caractérisées par le nombre de Nusselt n'augmentent que de façon relativement modérée. Pour  $\alpha = \beta = 0.50$ , les variations de  $\bar{Nu}$  sont inférieures à 8%. Les corrélations proposées dans la littérature dans le cas idéal fournissent des évaluations acceptables en première approximation pour des faibles valeurs du gradient pariétal. Les corrélations tenant compte de cette variation devraient être utilisées pour des évaluations plus fines (en particulier lorsque  $\alpha, \beta \geq 0.50$ ).

Dans le cas où les parois terminales sont conductrices, le nombre de Nusselt est diminué par rapport au cas idéal lorsque le facteur de forme,  $l$ , est inférieur à 1 (environ 20% pour  $l = 1$  et 40% pour  $l = 0.5$ ). Lorsque  $l \geq 5$ , l'influence des parois terminales est inférieure à 10% sur le nombre de Nusselt.

### BIBLIOGRAPHIE

1. I. Catton, Convection naturelle en espace clos, *Sixième Congrès International sur le transfert de chaleur*. Toronto, Canada (1978).
2. Y. Severi, Etude expérimentale de la convection naturelle à l'intérieur d'une cavité simulant un convertisseur plan d'énergie solaire, Thèse de 3ème cycle. Université d'Aix-Marseille (1980).
3. I. Catton, P. S. Ayyaswamy et R. M. Clever, Natural convection flow in a finite rectangular slot arbitrarily oriented with respect to the gravity vector, *Int. J. Heat Mass Transfer* 17, 173-184 (1974).
4. B. Roux, J. C. Grondin, P. Bontoux et B. Gilly, On a high-order accurate method for the numerical study of natural convection in a vertical square cavity, *Num. Heat Transfer* 1, 331-349 (1978).
5. D. D. Joseph, Stability of fluid motions II in *Springer*

- Tracts in Natural Philosophy* 28. Springer Verlag, New York (1976).
6. D. W. Peaceman et H. H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 3(1), 28–41 (1955).
  7. G. D. Mallinson et G. De Vahl Davis, The method of the false transient for the solution of coupled elliptic equations, *J. Comp. Phys.* 12, 435–461 (1973).
  8. R. S. Hirsh, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique, *J. Comput. Phys.* 19, 90–109 (1975).
  9. B. Roux, P. Bontoux, Ta Phuoc Loc et O. Daube, Optimisation of Hermitian methods for Navier–Stokes equations in the vorticity and stream function formulation in *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 450–468, 771. Springer-Verlag (1979).
  10. P. Bontoux, B. Gilly et B. Roux, Natural convection in cavities for high Rayleigh numbers in *Notes on Numerical Fluid Mechanics* pp. 22–35. Vieweg Verlag (1979).
  11. J. C. Grondin et B. Roux, Recherche de corrélations simples exprimant les pertes convectives dans une cavité bidimensionnelle, inclinée, chauffée différemment, *Revue de Physique Appliquée* 14, 49–56 (1979).
  12. E. R. G. Eckert et W. O. Carlson, Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures, *Int. J. Heat Mass Transfer* 2, 106–120 (1961).
  13. R. W. Thomas et G. De Vahl Davis, Natural convection in annular and rectangular cavities. *Proc. 4th International Heat Transfer Conference* paper no. 2.4. Versailles (1970).
  14. A. E. Gill, The boundary layer regime for convection in a rectangular cavity, *J. Fluid Mech.* 26(3), 515–536 (1966).
  15. J. W. Elder, Laminar free convection in a vertical slot, *J. Fluid Mech.* 23(1), 77–98 (1965).
  16. B. Gilly, Modélisation et simulation numérique de la convection naturelle dans une cavité parallélépipédique inclinée, Thèse de 3ème cycle. Université d'Aix-Marseille (1979).
  17. J. O. Wilkes et S. W. Churchill, The finite difference computation of natural convection in a rectangular enclosure, *A.I.Ch.E. Jl* 12(1), 161–166 (1966).
  18. W. Koutsoheras, Natural convection phenomena in inclined cells with finite side-walls. A numerical solution, Master of Engineering Science Thesis, Melbourne University (1976).
  19. G. N. Dulnev, Yu. P. Zarichnyak et A. V. Sharkov, Free convection at a vertical plate and in closed interlayer at different gas pressures, *Int. J. Heat Mass Transfer* 18, 213–218 (1975).
  20. M. E. Newell et F. W. Schmidt, Heat transfer by laminar natural convection within rectangular enclosures, *J. Heat Transfer* 92C, 159–168 (1970).

#### INFLUENCE OF THERMAL WALL CONDITIONS ON THE NATURAL CONVECTION IN A VERTICAL RECTANGULAR DIFFERENTIALLY HEATED CAVITY

**Abstract**—The natural convection in differentially heated cavities is usually studied in the case of ideal conditions: isothermal warm and cold, active walls and adiabatic passive lateral walls. In the case of real configurations, the thermal conditions on the active walls may not be uniform. Two models of non-uniform temperature distribution are studied by the way of numerical simulation. Modifications are brought to the correlation laws given in the ideal case between the Nusselt number and the Rayleigh number. The influence of conducting lateral walls is also investigated.

#### EINFLUSS DER THERMISCHEN RANDBEDINGUNGEN AUF DIE FREIE KONVEKTION IN EINEM UNGLEICHMÄSSIG BEHEIZTEN SENKRECHTEN HOHLRAUM

**Zusammenfassung**—Die freie Konvektion in ungleichmäßig beheizten Hohlräumen wird üblicherweise für den Fall idealer Bedingungen untersucht: Isotherme warme und kalte, aktive Wände und passive, adiabate, seitliche Wände. Im Falle von realen Anordnungen können die thermischen Bedingungen an den aktiven Wänden jedoch ungleichförmig sein. Durch numerische Simulation wurden zwei Fälle von ungleichförmiger Temperaturverteilung untersucht. An den Korrelationsgleichungen für den idealen Fall zwischen Nusselt- und Rayleigh-Zahl wurden Modifikationen vorgenommen. Der Einfluß von leitenden seitlichen Wänden wurde ebenfalls betrachtet.

#### ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВЫХ УСЛОВИЙ НА СТЕНКЕ НА ЕСТЕСТВЕННУЮ КОНВЕКЦИЮ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ С РАЗНЫМИ ТЕМПЕРАТУРАМИ СТЕНОК

**Аннотация**—Естественная конвекция в полостях с отличающимися температурами стенок обычно исследуется при идеальных условиях, то есть когда нагреваемая и охлаждаемая вертикальные стенки являются изотермическими, а боковые — адиабатическими. В реальных ситуациях тепловые условия на стенках могут быть неоднородными. С помощью численного метода исследуются два вида неоднородного распределения температуры. Для идеального случая представлены модифицированные зависимости между числами Нуссельта и Рейля. Исследуется также влияние теплопроводности боковых стенок.